Dependencia e indeterminación en la lógica de segundo orden*

Lucas Rosenblatt**

Resumen

En este trabajo presento dos argumentos en contra del presunto estatus lógico de la noción de consecuencia de segundo orden y defiendo estos argumentos de algunas réplicas. El primer argumento tiene que ver con la indeterminación de la noción de consecuencia de segundo orden. El segundo está vinculado a la similitud de la lógica de segundo orden con ciertas "lógicas" infinitarias de gran poder expresivo.

Palabras clave

Lógica de segundo orden
Teoría de conjuntos
Lógicas infinitarias
Consecuencia lógica

Abstract

In this paper I provide two arguments against the view that the consequence relation of second-order languages is a strictly logical notion and I try to defend these arguments from some objections. The first argument supports the conclusion that this relation is indeterminate. The second argument is based on the similarity between second-order logic and certain infinitary "logics" of great expressive power.

Key words

Second-order logic
Set theory
Infinitary logic
Logical consequence

Introducción

Hoy en día la lógica (clásica) de primer orden se ha vuelto la lógica dominante. Este hecho es, cuanto menos, curioso. Los sistemas utilizados por los "padres fundadores" de la lógica contemporánea eran sistemas de orden superior. Tanto los lenguajes empleados por Frege en *Begriffsschrift* y *Grundgesetze* como el ofrecido por Russell y Whitehead en *Principia Mathematica* admitían cuantificación sobre propiedades o conjuntos. Por eso, desde un punto de vista histórico, la lógica de primer orden puede verse como un fragmento de las teorías de orden superior. Claro que, luego de que se descubrieran ciertos resultados relativos a las propiedades metateóricas de este "fragmento", la

* Este trabajo fue presentado en el seminario del Grupo de Acción Filosófica. Quisiera agradecer a los asistentes por sus valiosos comentarios. También quisiera expresar mi gratitud hacia un árbitro anónimo de la Revista por sus observaciones (en particular, por instarme a discutir la interpretación plural de los lenguajes de segundo orden).
**Licenciado en Filosofía por la Universidad de Buenos Aires, docente de Lógica en la Facultad de Filosofía y Letras de la UBA, becario de doctorado CONICET.

manera de ver las teorías de primer orden fue eventualmente modificándose. Desde entonces estas han sido consideradas, con toda justicia, como teorías absolutamente autónomas, mientras que las teorías de orden superior han sido, en muchas ocasiones, relegadas al ámbito de la matemática. Resulta interesante, entonces, determinar qué entendemos hoy en día por "teoría lógica" y, en particular, cuáles son las propiedades que separan a las teorías lógicas de las teorías matemáticas.[1] Un caso paradigmático donde esta controversia se plantea es el de la lógica de segundo orden.

La idea de que la lógica de segundo orden es teoría de conjuntos encubierta o teoría de conjuntos "vestida con piel de cordero" fue presentada y defendida por primera vez en Quine (1970). Las principales críticas al estatus de la relación de consecuencia de segundo orden enunciadas allí son dos. La primera tiene que ver con sus compromisos ontológicos. Se exige que un lenguaje lógico sea "neutral respecto del tópico" en el sentido de que los posibles valores semánticos de las variables del lenguaje no deben ser entidades de algún tipo específico. Quine y otros han señalado que los lenguajes de segundo orden no respetan esta exigencia porque los valores posibles para las variables de predicado son conjuntos. La segunda crítica está vinculada con la completitud. No es posible construir un sistema deductivo que capture todas las inferencias semánticamente válidas de segundo orden.[2] Si consideramos que la completitud es una condición necesaria para que una teoría sea lógica, entonces la relación de consecuencia de segundo orden no es una relación estrictamente lógica.

Stewart Shapiro (1991) ha notado la presencia de cierta tensión en la posición quineana. Si Quine tiene razón en que no hay diferencias esenciales entre las leyes lógicas más básicas y las más complejas hipótesis de las ciencias fácticas,[3] ¿qué sentido tiene pretender que exista una distinción clara entre la lógica y la teoría de conjuntos? Una vez abandonado el proyecto fundacionista[4] e instaurada una epistemología de carácter más holista, poco espacio queda para trazar distinciones de este tipo. Como bien apunta Shapiro, esto tiene importantes consecuencias al analizar el caso de la lógica de segundo orden. Si la lógica y la matemática forman un continuo, y si la intención no es ya fundamentar la matemática sino codificar de manera satisfactoria los razonamientos que los matemáticos llevan a cabo,[5] la noción de consecuencia de segundo orden puede ser una herramienta adecuada para hacerlo. Nótese, además, que si las pretensiones de fundamentación han desaparecido, el resultado de completitud no parece seguir siendo una condición *sine qua non* para el estudio de la matemática ni para que una teoría sea considerada *lógica*, pues nuestra confianza en la semántica hace que los sistemas deductivos no sean indispensables.

Algunos filósofos[6] han puesto en tela de juicio estas observaciones antiquineanas replicando que la razón por la cual la lógica de segundo orden es tan adecuada para caracterizar diversos aspectos de la práctica matemática es que presupone una gran cantidad de información directamente relacionada con la existencia de conjuntos. La principal diferencia entre el propio Quine y los nuevos detractores de la lógica de segundo orden es que mientras el primero está pensando en los compromisos ontológicos de los lenguajes de segundo orden y en el desajuste entre la semántica y el aparato deductivo, los segundos se focalizan en otra cuestión. El punto fundamental pasa a ser que hay ciertas equivalencias entre fórmulas de segundo orden y fórmulas conjuntistas de reputación dudosa que provocan que la noción de consecuencia de los lenguajes de segundo orden permanezca indeterminada.[7]

En este punto el lector podría tener la sensación de que la discusión es meramente verbal. Por un lado, hay ciertos filósofos dispuestos a aplicarle el adjetivo "lógica" a la noción de consecuencia de segundo orden y, por otro, hay algunos filósofos que se niegan a hacerlo. Esto quizás se deba en parte al hecho de que no contamos

1. Un intento por dar una respuesta a la pregunta de cómo los elementos de orden superior fueron excluidos de la lógica puede encontrarse en Eklund, M. (1996: 147-167). Ver también el capítulo 7 de Shapiro, S. (1991).

2. Siempre y cuando la noción semántica de consecuencia se defina de cierta forma (ver más adelante).

3. Ver la parte final de Quine (1953).

4. Siguiendo a Shapiro (1991) definiré el fundacionismo como la posición según la cual es posible y deseable reconstruir cada rama de la matemática sobre una base completamente segura desde un punto de vista epistémico.

5. La distinción entre *fundamentar la matemática* y *codificar los razonamientos matemáticos* es sutil pero importante. En general, cuando se habla de fundamentar la matemática se tiene en mente la vieja idea cartesiana de encontrar cimientos epistémicamente seguros en los cuales apoyar las teorías matemáticas. En cambio, cuando se habla de codificar los razonamientos matemáticos, se está pensando en describir la práctica matemática en el sentido de caracterizar de manera rigurosa (preferiblemente usando lenguajes formales) sus conceptos principales. Es importante notar que en este último caso no hay una fuerte dimensión normativa en juego, ni una aspiración oculta de justificación.

6. Especialmente Jané, I. (2005). Ver también su (1993).

7. En un reciente artículo Otavio Bueno considera y responde cinco objeciones a la lógica de segundo orden. Desafortunadamente, no discute la objeción de la indeterminación. Ver Bueno, O. (2010).

actualmente con un criterio general de logicidad que nos permita establecer si una noción es lógica o no lo es. Ahora bien, pese a la ausencia de un criterio de este tipo, lo que los nuevos detractores de la lógica de segundo orden sugieren es que es posible dar condiciones necesarias para que una noción sea lógica. En particular, parece razonable exigir que la noción de consecuencia tenga cierto grado de determinación, al menos en el sentido de que la extensión del conjunto de inferencias válidas no dependa masivamente de hechos conjuntistas.

De cualquier forma, aún admitiendo que la discusión no es puramente verbal, podría objetarse que no tiene ninguna importancia teórica, es decir, que ninguna conclusión filosófica relevante se sigue del hecho de que la noción de consecuencia de segundo orden sea lógica o no lo sea. Sin embargo, es interesante advertir que la discusión es relevante para evaluar ciertas posiciones aún vigentes en el campo de la filosofía de la matemática. Por ejemplo, si hubiera argumentos concluyentes a favor de la no logicidad de la noción de consecuencia de segundo orden, se derrumbarían todos aquellos proyectos de corte neologicista en los cuales se pretende algún tipo de reducción de cierta rama de la matemática a la lógica de segundo orden. Hechas estas aclaraciones, paso a describir la estructura del trabajo.

En las secciones que siguen haré dos cosas. En primer lugar, presentaré en detalle la crítica de la indeterminación e intentaré responder algunas objeciones que los defensores de la lógica de segundo orden han ofrecido. En segundo lugar, proporcionaré un nuevo argumento en contra del estatus lógico de la noción de consecuencia de segundo orden basado en su similitud con ciertas "lógicas" infinitarias de gran poder expresivo. Al igual que con la objeción de la indeterminación, consideraré algunas objeciones e intentaré responderlas.

Cuestiones preliminares 1

Sea L^2 un lenguaje lógico de segundo orden. Además de contar con variables de individuo ($x_1, x_2, x_3,$), símbolos de función n-ádicos (f^n_1, f^n_2, f^n_3 ; para cada número natural n), conectivas ($\neg, \wedge, \vee$ y $\rightarrow$) y cuantificadores de primer orden ($\forall x$ y $\exists x$), el vocabulario de L^2 tiene variables de predicado n-ádicas (X^n_1, X^n_2, X^n_3 .; para cada número natural n) y cuantificadores de segundo orden ($\forall X$, $\exists X$, $\forall f$ y $\exists f$).[8] Es muy sencillo construir un sistema deductivo para L^2 añadiendo algunos axiomas y reglas a un sistema deductivo usual de primer orden. Llamemos D^2 a tal sistema.[9] D^2 tiene reglas (y/o axiomas) que gobiernan el comportamiento de los cuantificadores de segundo orden y un axioma-esquema de comprensión que afirma que toda fórmula de L^2 determina una relación:

Axioma de Comprensión: $\exists X^n \forall x_1,\ldots,\forall x_n(X^n x_1,\ldots,x_n \leftrightarrow \varphi(x_1,\ldots,x_n))$ donde ´X^n` no aparece libre en ´$\varphi$`.

A la hora de interpretar L^2, hay varias opciones. Para lo que quiero decir aquí sólo me interesa mencionar tres. La primera es usar una semántica estándar o canónica. La idea es interpretar los cuantificadores de segundo orden ´$\forall X$` y ´$\exists X$` como si su recorrido fuera el conjunto de todos los subconjuntos del dominio (i.e. el conjunto potencia del dominio). Un modelo canónico para L^2 es una estructura $M^C = <d, I>$ tal que d es un conjunto no vacío e I es una función que asigna valores semánticos a las expresiones no lógicas si hay alguna (igual que en primer orden). Definimos también una función s que asigna valores semánticos a las variables. Si se trata de variables de individuo, s asigna objetos del dominio d, y si se trata de variables de predicado

8. El lector puede tomar como referencia los lenguajes L2 y L1= presentados en Shapiro (1991, cap. 3).

9. Utilizaré un sistema *análogo* a D2 de Shapiro (1991, cap. 3). La única diferencia fundamental con D2 consiste en que no voy a considerar el Axioma de Elección como un axioma.

n-ádicas, elementos del conjunto potencia de d^n. De esta forma, sólo tenemos que agregar dos nuevas cláusulas semánticas:

Si X^n es una variable de relación n-ádica y $t_1,\ldots,t_n$ es una secuencia de términos, entonces $M^C,s \models X^n t_1,\ldots,t_n$ si y sólo si la secuencia de miembros $t_1,\ldots,t_n$ pertenecientes a d es un elemento de $s(X^n)$.

$M^C, s \models \forall X\varphi$ si y sólo si $M^C, s' \models \varphi$ para toda asignación s' idéntica a s quizás excepto en lo que asigna a X.[10]

La noción de consecuencia lógica canónica queda definida del modo habitual. Decimos que la fórmula A es una consecuencia canónica del conjunto de fórmulas Γ ($\Gamma \models_C A$) si y sólo si no hay una estructura M^C junto con una asignación s que satisface a todos los miembros de Γ y no satisface la fórmula A.

La segunda opción es usar modelos Henkin. En este caso, los cuantificadores recorren solamente un subconjunto del conjunto potencia del dominio. Un modelo Henkin es una estructura $M^H = \langle d, I, D\rangle$ donde d e I son iguales que antes, y para cada número natural n, $D(n)$ es un subconjunto del conjunto potencia de d^n. Definimos también una función s que asigna valores semánticos a las variables de individuo y de predicado. Pero en este caso, si se trata de variables de predicado n-ádicas, la función asigna miembros de $D(n)$. Una vez más, sólo se agregan dos nuevas cláusulas:

Si X^n es una variable de relación n-ádica y $t_1,\ldots,t_n$ es una secuencia de términos, entonces $M^H,s \models X^n t_1,\ldots,t_n$ si y sólo si la secuencia de miembros $t_1,\ldots,t_n$ pertenecientes a d es un elemento de $s(X^n)$.

$M^H, s \models \forall X\varphi$ si y sólo si $M^H, s' \models \varphi$ para toda asignación s' sobre M^H idéntica a s quizás excepto en lo que asigna a X.

La noción de consecuencia lógica Henkin queda definida del modo habitual. Decimos que la fórmula A es una consecuencia Henkin del conjunto de fórmulas Γ ($\Gamma \models_H A$) si y sólo no hay una estructura M^H junto con una asignación s que satisface a todos los miembros de Γ y no satisface la fórmula A.

La diferencia fundamental entre los dos modos de interpretar L^2 que he considerado hasta aquí está en el alcance de los cuantificadores. En el caso de la semántica canónica los posibles valores para una variable de predicado n-ádica están en el conjunto potencia del dominio d^n, mientras que en el caso de la semántica Henkin los valores están en D(n). Por supuesto, cabe la posibilidad de que D(n) sea idéntico al conjunto potencia de d^n. De este modo, se ve que los modelos canónicos son un caso límite de los modelos Henkin.

Es importante destacar que las propiedades metateóricas de las teorías de segundo orden dependen fuertemente del tipo de semántica que se emplee. Bajo la semántica Henkin, la lógica de segundo orden comparte prácticamente todas las propiedades metateóricas de la lógica de primer orden: es correcta con respecto a D^2, D^2 es completo con respecto a la semántica, vale compacidad, y valen los teoremas Lowenheim-Skolem.[11] Sólo cuando empleamos estructuras canónicas para interpretar L^2 salen a la luz las diferencias fundamentales con la lógica de primer orden. Si bien D^2 es un sistema correcto para los modelos M^C, el resto de las propiedades se pierden. Las teorías de segundo orden canónicamente interpretadas no son completas[12] ni compactas, y los teoremas Lowenheim-Skolem (descendente y ascendente) no valen.[13] Por otra parte, un aspecto positivo de las teorías de segundo orden (ausente en las teorías de primer orden) es la categoricidad. Una teoría es categórica cuando todos sus modelos son isomórficos entre sí.

10. Dos comentarios. En primer lugar, el cuantificador $\exists X$ puede definirse del modo usual en términos de la negación y de $\forall X$. En segundo lugar, aunque más adelante haré uso de cuantificaciones sobre funciones, aquí omito las cláusulas para expresiones funcionales de la forma $f^n t_1,\ldots,t_n$ y cuantificaciones sobre funciones de la forma $\exists f\varphi$ y $\forall f\varphi$. La omisión también se extiende a los modelos.

11. Por razones de espacio estoy obviando una dificultad relativamente seria de los modelos de Henkin. Hay instancias del Axioma-esquema de Comprensión que no son satisfechas por ciertas estructuras M^H. Con lo cual, en sentido estricto, la semántica de Henkin es *incorrecta* con respecto a D^2. Para evitar esta complicación lo que suele hacerse (cfr. por ejemplo Shapiro [1991, p. 88 y ss.]) es considerar solamente una subclase apropiada de los modelos Henkin (a saber, aquellos que satisfacen todas las instancias del Axioma de Comprensión) y probar que los resultados metateóricos mencionados valen para esta subclase.

12. Esto no se debe a una insuficiencia deductiva de D^2. La noción de consecuencia semántica canónica no puede ser axiomatizada por ningún sistema deductivo por razones gödelianas.

13. El lector interesado en las pruebas puede dirigirse a Shapiro (1991, capítulo 4).

Daré un ejemplo. Consideremos el lenguaje L^2A que resulta de añadirle a L^2 el siguiente conjunto de símbolos no lógicos: la constante cero, y las funciones sucesor, suma y multiplicación {0, s, +, .}. La aritmética de Peano de segundo orden PA^2 tiene los siguientes axiomas de primer orden:

Sucesor: $\forall x(sx \neq 0) \wedge \forall x \forall y(sx = sy \rightarrow x = y)$

Suma: $\forall x(x + 0 = x) \wedge \forall x \forall y(x + sy = s(x + y))$

Multiplicación: $\forall x(x \,.\, 0 = 0) \wedge \forall x \forall y(x \,.\, sy = (x \,.\, y) + x))$

Y cuenta además con el siguiente axioma de segundo orden:

Inducción: $\forall X((X0 \wedge \forall x(Xx \rightarrow Xsx)) \rightarrow \forall xXx)$

Puede mostrarse que para cualesquiera dos modelos M_1=<d_1,I_1> y M_2=<d_2,I_2>, si M_1 y M_2 satisfacen los axiomas de PA^2, entonces existe una función *f* uno-a-uno que mapea d_1 sobre d_2 y que preserva la estructura de los modelos. PA^2 es sólo un ejemplo. Los lenguajes de segundo orden (con semántica canónica) son capaces de caracterizar diversas estructuras matemáticas hasta el isomorfismo. Esta es la principal virtud de las teorías de segundo orden y la razón por la cual algunos han querido defenderlas.[14]

La tercera opción a la hora de interpretar L^2 es traducir sus expresiones utilizando plurales. Este tipo de interpretación fue desarrollada en diversos trabajos por George Boolos.[15] La idea fundamental de Boolos puede ilustrarse del modo siguiente. Consideremos el enunciado ´∃XXa`, donde ´a` es una constante de individuo que denota un objeto del dominio y ´X` es una variable unaria de predicado. Bajo la semántica usual, este enunciado expresa la idea de que existe un subconjunto del dominio tal que el objeto denotado por ´a` pertenece a ese subconjunto. Ahora bien, Boolos notó que hay una manera alternativa de interpretar este enunciado en la cual la cuantificación se lee pluralmente. Decimos que existen objetos en el dominio y que el objeto denotado por ´a` es uno de ellos. En lugar de cuantificar singularmente sobre un nuevo objeto conjuntista, cuantificamos pluralmente sobre los viejos objetos del dominio.

Esta idea puede desarrollarse de manera más formal.[16] Sea L^{PL} un lenguaje plural. Además de tener poseer todas las expresiones del lenguaje usual de primer orden, L^{PL} posee cuantificadores plurales ($\forall xx$, $\exists xx$), variables plurales (xx, yy, zz,...) y un símbolo de relación binario ($x \angle xx$) que representa la relación *ser uno de los*, la cual se da entre un objeto de dominio y una pluralidad de objetos del dominio. Sea L^{2M} un lenguaje de segundo orden idéntico a L^2 excepto por el hecho de que sólo tiene variables de relación monádicas. Lo que Boolos mostró es que es posible interpretar el lenguaje L^{2M} por medio de una función de traducción *Trad* que va de L^{2M} a L^{PL} y que opera de la siguiente forma:

$Trad(Xx) = x \angle xx.$

$Trad(\exists X\varphi) = \exists xx Trad(\varphi) \wedge Trad(\varphi^*)$

(donde φ^* es la fórmula que resulta de sustituir cada aparición de Xx por $x \neq x$).[17] Los demás tipos de fórmulas se traducen del modo obvio.

A su vez, podemos encontrar otra función *Trad´* de L^{PL} al lenguaje natural (aumentado con índices para facilitar la comprensión) que cumple con las siguientes condiciones:

Trad´($x \angle xx$) = ese$_x$ es uno de ellos$_{xx}$

14. Es importante notar que el cambio sustancial en capacidad expresiva (y en propiedades metateóricas) se produce al pasar de primer orden a segundo orden. Para n > 2, hay un sentido interesante en que posible reducir cualquier lógica de orden n a la lógica de segundo orden. El lector interesado en los resultados técnicos en los que se apoya esta afirmación puede consultar Shapiro (1991, cap. 6, secciones 6.1 y 6.2). (Ver especialmente el teorema 6.3).

15. Ver, sobre todo, Boolos, G. (1985).

16. Seguiré la presentación de Linnebo, O. (2008).

17. Esta restricción responde al hecho de que no hay una pluralidad vacía, aunque sí existe el conjunto vacío. El conjunto vacío puede ser un posible valor para X, pero no hay algo análogo para xx.

Trad´(∃xxφ) = hay algunos objetos$_{xx}$ tal que *Trad´*(φ)

Bajo la suposición de que tenemos una comprensión intuitiva de las expresiones del lenguaje natural que aparecen arriba, podemos inferir que es posible interpretar el lenguaje L^{2M} ofreciendo traducciones de este tipo.[18]

La noción de consecuencia lógica plural está diseñada para que coincida extensionalmente con la noción canónica de consecuencia. Lo atractivo de este tipo de semántica es que se logra otorgarle al lenguaje la capacidad expresiva usual de los lenguajes de segundo orden y, al mismo tiempo, se evitan las críticas quineanas relacionadas con los compromisos ontológicos de estos lenguajes. Esto se debe a que en los modelos plurales los valores posibles para las variables de predicado ya no son conjuntos. Hay un incremento expresivo o ideológico sin una correspondiente inflación de la ontología. Los lenguajes de segundo orden, pluralmente interpretados, no nos comprometen con entidades distintas de las que ya asumimos cuando usamos un lenguaje de primer orden. El dominio sobre el que ambos lenguajes cuantifican es el mismo, lo que cambia es el modo de cuantificar. Mientras que en primer orden cuantificamos singularmente sobre los objetos de un dominio dado, en segundo orden cuantificamos pluralmente sobre esos mismos objetos.

Ahora bien, actualmente no hay demasiado consenso acerca de la legitimidad y el estatus de la interpretación plural. Si bien dicha interpretación tiene algunos partidarios,[19] ha habido varias voces de disenso.[20] En particular, la queja usual es que el uso y la comprensión de los cuantificadores plurales presuponen el uso y la comprensión de la noción de conjunto. Aquí no entraré en los detalles de esta discusión. En cualquier caso, estoy dispuesto a concederle al defensor de la semántica plural que la misma no está sujeta a la clásica objeción quineana relacionada con el compromiso ontológico de los lenguajes de segundo orden. Habrá que ver, sin embargo, si está sujeta a la objeción de la indeterminación.

Indeterminación

Algunos detractores de la lógica de segundo orden (*qua* teoría lógica) alegan que si interpretamos L^2 con modelos canónicos, su relación de consecuencia está indeterminada. Esta afirmación se apoya en un resultado técnico (o una familia de resultados técnicos) que vincula la lógica de segundo orden con la teoría de conjuntos. Sea L^{SET} un lenguaje de primer orden con identidad cuyo único símbolo no lógico es el predicado de pertenencia ´∈`. Sea ZFC la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel.[21] El resultado en cuestión es el siguiente:

DEPENDENCIA: Existe un conjunto Γ de formulas de L^{SET} y un conjunto Δ de fórmulas de L^2 tal que para cada $\gamma \in \Gamma$ no se da que ZFC $\vdash \gamma$ ni que ZFC $\vdash \neg\gamma$, y tal que podemos encontrar fórmulas $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ tales que para toda estructura M^C y toda asignación s, $M^C, s \models \delta_1$ si y sólo si γ es verdadera; y $M^C, s \models \delta_2$ si y sólo si γ es falsa.[22]

Esto quiere decir que hay ciertas fórmulas del lenguaje puro de la lógica de segundo orden (es decir, fórmulas completamente despojadas de vocabulario no lógico) que son equivalentes a fórmulas de la teoría de conjuntos cuyo estatus epistémico podría ser dudoso. Nuestro desconocimiento acerca de la verdad o falsedad de las afirmaciones conjuntistas se transforma en desconocimiento respecto de la validez de cierta fórmula de segundo orden.

18. Boolos originalmente sólo presento una semántica plural para lenguajes *monádicos* de segundo orden. Ha habido algunos intentos de extender esta semántica a variables de relación n-ádicas. Cfr., por ejemplo, Rayo, A. y Yablo, S. (2001). Si bien la naturalidad de la interpretación plural para el caso monádico desaparece cuando consideramos variables de relación, asumiré aquí que la semántica puede extenderse sin mayores problemas.

19. Entre otros, Bueno, O. (2010) y Rayo, A. (2005).

20. Por ejemplo, Resnik, M. (1988) y Linnebo, O. (2003).

21. ZFC contiene los siguientes axiomas: Conjunto Vacío, Extensionalidad, Pares, Unión, Potencia, Infinitud, Elección, Fundación y el Axioma-esquema de Reemplazo (el Axioma-esquema de Separación puede derivarse de los otros). Una presentación sencilla de ZFC puede encontrarse en Enderton, H. (1977).

22. Ver Mosterín, J. (2004).

Daré un par de ejemplos para ser más específico. La Hipótesis del Continuo es la afirmación de que no hay cardinalidades intermedias entre $\aleph_0$ (la cardinalidad del conjunto de los números naturales) y $2^{\aleph_0}$ (su conjunto potencia). Es decir, el conjunto infinito más pequeño luego de $\aleph_0$ –llamémoslo $\aleph_1$– es el que obtenemos al aplicarle la operación potencia a $\aleph_0$. Abreviadamente, esto puede formularse del siguiente modo: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. El hecho que quiero destacar aquí es que la Hipótesis del Continuo tiene su contraparte en L^2.

Mostrar esto requiere algunas definiciones previas. Para cualesquiera dos conjuntos A y B, diré que la cardinalidad del conjunto A es *menor o igual* que la cardinalidad del conjunto B si y sólo si existe una función uno-a-uno de A en B. En L^2 esto puede expresarse de la siguiente forma:

$|A|\leq|B| =_{df} \exists f(\forall x\forall y((Ax \wedge By \wedge fx = fy) \rightarrow x = y) \wedge \forall x(Ax \rightarrow Bfx))$

Diré que la cardinalidad del conjunto A es *idéntica* a la cardinalidad del conjunto B si y sólo si hay una función uno-a-uno de A *sobre* B. En L^2 esto puede expresarse así:

$|A|=|B| =_{df} |A|\leq|B| \wedge |B|\leq|A|$[23]

Necesitaré también la noción de conjunto infinito contable. Diré que un conjunto A es *infinito* si y sólo si A puede ponerse en correspondencia uno-a-uno con uno de sus subconjuntos propios, y diré que un conjunto A es *contable* si y sólo si todos sus subconjuntos son o bien finitos o bien de cardinalidad idéntica a la cardinalidad de A. En términos más formales:

A es INFINITO $=_{df} \exists f(\forall x\forall y(fx = fy \rightarrow x = y) \wedge \forall x(Ax \rightarrow Afx) \wedge \exists y(Ay \wedge \forall x(Ax \rightarrow fx \neq y)))$

A es CONTABLE $=_{df} \exists X(X \subseteq A \rightarrow$ (X no es INFINITO $\vee |A|=|X|))$[24]

Con estas nociones es posible caracterizar el *primer cardinal infinito* $\aleph_0$:

A es $\aleph_0 =_{df}$ A es CONTABLE $\wedge$ A es INFINITO.[25]

Una vez que tenemos $\aleph_0$ es posible caracterizar $\aleph_1$, y una vez que tenemos $\aleph_0$ y $\aleph_1$, es posible caracterizar $\aleph_2$. En general, para cualquier número natural n, si ya caracterizamos $\aleph_m$ para todo $m < n$, podemos caracterizar $\aleph_n$ de la siguiente forma:

A es $\aleph_n =_{df}$ A es INFINITO $\wedge$ A no es $\aleph_0 \wedge .... \wedge$ A no es $\aleph_{n-1} \wedge \forall X(X \subseteq A \rightarrow$ (X no es INFINITO $\vee$ X es $\aleph_0 \vee .... \vee$ X es $\aleph_{n-1} \vee |A|=|X|))$.

En particular, tenemos:

A es $\aleph_1 =_{df}$ A es INFINITO $\wedge$ A no es $\aleph_0 \wedge \forall X(X \subseteq A \rightarrow$ (X no es INFINITO $\vee$ X es $\aleph_0 \vee |A|=|X|))$.

Sólo necesitamos una noción más. Diré que B es el *conjunto potencia* de A si y sólo si B es el conjunto de todos los subconjuntos de A. De manera un poco más formal, decimos que existe una función *f* cuyo dominio es A y cuyo rango es B tal que para cualquier subconjunto Z de A, existe un conjunto v en B que comprende a todos los miembros de ese subconjunto. En L^2 la definición queda articulada del siguiente modo:

$POT(A,B) =_{df} \exists f(\forall u(Au \leftrightarrow \exists z(fu = z)) \wedge \forall u(Bu \leftrightarrow \exists z(fz = u)) \wedge \forall Z(Z \subseteq A \rightarrow \exists v\forall x(Zx \leftrightarrow fx = v)))$

23. Estoy apoyándome aquí en el teorema Schöeder-Bernstein (Enderton [1977, p.147]), pero $|A|=|B|$ también puede definirse agregando la condición de sobreyectividad a la definición de $|A|\leq|B|$.

24. La abreviación obvia para $X \subseteq A$ en L^2 es $\forall x(Xx \rightarrow Ax)$.

25. Por cuestiones de simplicidad estoy tratando el símbolo $\aleph_0$ como un predicado monádico.

Ahora estamos en condiciones de formular la Hipótesis del Continuo en L^2:

CH: $\forall X \forall Y((X \text{ es } \aleph_0 \rightarrow (POT(X,Y) \leftrightarrow Y \text{ es } \aleph_1))$[26]

Esta fórmula de L^2 es semánticamente válida si y sólo si la Hipótesis del Continuo es una verdad conjuntista. También es posible construir una fórmula que sea semánticamente válida si y sólo si la Hipótesis del Continuo es falsa:

NCH: $\forall X \forall Y((X \text{ es } \aleph_0 \rightarrow \neg(POT(X,Y) \leftrightarrow Y \text{ es } \aleph_1))$[27]

La posibilidad de construir fórmulas de este tipo en L^2 es importante porque se sabe que ni ZFC $\vdash 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ni ZFC $\vdash 2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$.

Un hecho adicional que es relevante mencionar es que si formulamos ZFC en segundo orden, o bien la Hipótesis del Continuo o bien su negación pasan a ser consecuencias semánticas de los axiomas. Sea ZFC^2 la teoría (expresada en L^2 más el predicado $\in$) que resulta de transformar los axiomas-esquema de ZFC en axiomas en sentido estricto.[28] Es posible mostrar que o bien $ZFC^2 \models_C 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ o bien $ZFC^2 \models_C 2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$, aún cuando no se da que $ZFC^2 \vdash_{D2} 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ni que $ZFC^2 \vdash_{D2} 2^{\aleph_0} \neq \aleph_1$.

Otro ejemplo interesante es el de los cardinales inaccesibles.[29] Algunos matemáticos creen que ZFC debería enriquecerse con un axioma que declare la existencia de cardinales inaccesibles.[30] Al igual que antes, hay una fórmula de L^2 que es universalmente válida si y sólo si existen cardinales inaccesibles. Diré que el cardinal de un conjunto A es *inaccesible* si y sólo si satisface los siguientes requisitos:

(i) $\aleph_0 < |A|$

(ii) Para todo conjunto B tal que $|B|<|A|$, se cumple que $2^{|B|}<|A|$

(iii) $|A|$ es regular. Esto quiere decir que si S es un conjunto de ordinales tal que $|S|<|A|$, y para todo $B \in S$, $|B|<|A|$, entonces $|SupS| < |A|$ (donde SupS es el ordinal que es el Supremo de S).

En términos más intuitivos, un cardinal A es inaccesible si y sólo si es mayor que el cardinal infinito más pequeño y no podemos "alcanzarlo" por medio de la aplicación de la operación potencia a cardinales menores a A ni tampoco por medio de la aplicación de la operación unión a conjuntos de ordinales menores a A cuyos miembros son también menores a A. Es posible representar estas ideas en L^2 por medio de un predicado INACCESIBLE(X) que es verdadero de X si y sólo si la cardinalidad del conjunto denotado por X es inaccesible.[31] La existencia de cardinales inaccesibles queda expresada por la siguiente fórmula de L^2:

IC: $\exists X$ (INACCESIBLE(X))

Puede mostrarse que IC es universalmente válida si y sólo si la afirmación conjuntista de que existen cardinales inaccesibles es verdadera. También hay una fórmula de L^2 que es universalmente válida si y sólo si no existen cardinales inaccesibles. Al igual que con la Hipótesis del Continuo y su negación, el interés del ejemplo surge de que sabemos que ZFC no implica la existencia (ni la inexistencia) de cardinales inaccesibles.[32]

Estos ejemplos reflejan el hecho de que la noción de consecuencia semántica canónica está indeterminada o, equivalentemente, que su determinación depende de cuestiones conjuntistas. En los dos casos que vimos es importante destacar que las

26. De manera similar, con las nociones introducidas podemos expresar la Hipótesis del Continuo Generalizada en L2, esto es, la afirmación de que no hay cardinalidades intermedias entre *ningún* conjunto y su conjunto potencia: GCH: $\forall X \forall Y \forall Z((X \text{ es INFINITO} \wedge POT(X,Y) \wedge |Z|<|Y|) \rightarrow |Z| \leq |X|)$.

27. Nótese que NCH no es la negación de CH. No se cumple que la negación de CH sea válida si y sólo si la Hipótesis del Continuo es falsa. Esto se debe a que CH es (trivialmente) satisfacible en todos los modelos con dominio de cardinalidad contable. Si la cardinalidad del dominio es finita, entonces el antecedente de CH es falso, y si la cardinalidad del dominio es $\aleph_0$, el consecuente de CH es verdadero. Luego, la negación de CH será falsa en este tipo de modelos aún cuando la Hipótesis del Continuo no valga.

28. El único axioma-esquema de ZFC es Reemplazo.

29. Me refiero aquí a los cardinales *fuertemente* inaccesibles. Para la distinción entre cardinales inaccesibles fuertes y débiles, el lector puede consultar Drake, F. (1974: 67).

30. La existencia de dichos cardinales es atractiva porque es posible construir modelos que satisfacen los axiomas de ZFC utilizando la estructura $<V_k,\in>$, donde la cardinalidad del ordinal k es inaccesible.

31. La representación de este predicado en L^2 es larga y compleja de modo que la omitiré aquí. El lector interesado puede consultar Mosterín (2004: 60).

32. Una manera sencilla de constatar esto es la siguiente. Si, como ya dije, es posible construir modelos de ZFC utilizando la estructura $<V_\kappa,\in>$ (donde la cardinalidad del ordinal k es inaccesible), entonces, por el Segundo Teorema de Gödel, podemos estar seguros de que ZFC no implica la existencia de dichos cardinales. Si la implicara, habríamos mostrado la consistencia de ZFC en ZFC.

cuestiones conjuntistas de las que la noción de consecuencia depende son preguntas abiertas en la teoría de conjuntos estándar. El problema con esto es que CH, por tomar uno de los ejemplos, es una fórmula puramente lógica, con lo cual sabemos que o bien es universalmente válida o bien no lo es. Luego, por el resultado de equivalencia presentado, tenemos que inferir que la Hipótesis del Continuo es verdadera o no lo es, a pesar de que sabemos que nunca será posible dar una prueba de su verdad o su falsedad en ZFC. En virtud de este hecho algunos han sugerido que la noción de consecuencia semántica de segundo orden está indeterminada (en el sentido de que hay fórmulas que no son universalmente válidas ni no lo son), a menos que se acepte cierta forma de realismo matemático.[33] Pero, idealmente, una teoría lógica no debería comprometernos con una posición filosófica sustantiva como el realismo matemático.[34] Por lo tanto, la teoría que caracteriza la noción de consecuencia semántica canónica de segundo orden no es una teoría estrictamente lógica.

33. El tipo de realismo matemático con el que el defensor de la lógica de segundo orden está comprometido es discutible. Para una presentación de las distintas variantes de realismo matemático, ver Shapiro, S. (2000: capítulo 8).

34. No discutiré aquí con aquellos que creen que esta afirmación es falsa. (Por ejemplo, Williamson, T. (2007: caps. 3 y 4). En cualquier caso, estoy dispuesto a conceder que, si una discusión filosófica llega a un punto muerto, pueden haber consideraciones puramente lógicas que inclinen la balanza a favor de una de las posiciones. Pero está claro que en el caso que estamos analizando, el compromiso de los partidarios de la lógica de segundo orden con cierta forma de realismo parece más una consecuencia indeseable que una virtud teórica de su posición.

Nótese, por otra parte, que si el defensor de la interpretación plural tiene razón en que hay una coincidencia extensional de la noción plural de consecuencia con la noción canónica de consecuencia, la objeción de la indeterminación también se aplica a la noción plural. Por supuesto, la noción plural no está sujeta a las críticas quineanas relativas a los compromisos ontológicos del lenguaje de segundo orden, pero aquí el cargo es otro. La objeción sugiere que la extensión del conjunto de fórmulas válidas de segundo orden depende esencialmente de ciertas conjeturas conjuntistas indecidibles. Dada la coextensionalidad mencionada, esto se cumplirá tanto si usamos modelos canónicos como si usamos una traducción a un lenguaje con cuantificadores plurales.

Nada de esto sugiere que la noción de consecuencia semántica canónica (ni la plural) sea defectuosa ni que sea desaconsejable utilizarla. Lo único que la objeción pretende señalar es que hay cierta insustancialidad, típicamente asociada a nociones lógicas, que se pierde en el caso de la noción de consecuencia de segundo orden. Nótese que tampoco se ha pedido la presencia de un cálculo completo ni neutralidad absoluta con respecto al tópico. La objeción de la indeterminación es más sutil que las clásicas críticas quineanas. Me interesa subrayar esto porque en la sección siguiente intentaré responder algunas réplicas a la objeción de la indeterminación y, en muchos casos, las réplicas parecen obviar estas sutilezas.

Réplicas y contrarréplicas: indeterminación

En esta sección consideraré e intentaré responder dos réplicas que se han ofrecido a la objeción de la indeterminación de la noción de consecuencia. La primera apunta al hecho de que la noción de consecuencia lógica de primer orden también depende de cuestiones conjuntistas. La segunda se apoya en ideas anti-fundacionistas para desacreditar la tesis de que la lógica debe ser insustancial.

Dependencia en primer orden

Ante la objeción relacionada con la dependencia de la teoría de conjuntos y la indeterminación, la réplica usual es que también en el caso de la noción de consecuencia de primer orden se plantean dificultades de este tipo.[35] En un sentido trivial, la teoría de conjuntos interfiere masivamente en la lógica de primer orden. Por ejemplo, si restringimos los dominios a conjuntos de dos o más elementos, la fórmula $\exists x \exists y(x \neq y)$ será una verdad lógica, y si dejamos de lado la convención de que el dominio sea no vacío, las fórmulas de la forma $\exists x \neg(\varphi(x) \wedge \neg \varphi(x))$ dejarán de ser lógicamente verdaderas.[36] Y, generalizando, puede decirse que la cantidad de fórmulas de primer

35. Mosterín, J. (2004: 60).

36. Algo que ocurre en las lógicas inclusivas.

orden incluidas en el conjunto de verdades lógicas depende en gran medida de la ontología conjuntista subyacente. Por eso, el resultado técnico (o la familia de resultados técnicos) mencionado al principio para la noción de consecuencia de segundo orden tiene su análogo en primer orden. Sea $L^1=$ un lenguaje de primer orden con identidad y sea Γ el conjunto de las fórmulas universalmente válidas de $L^1=$.

DEPENDENCIA* La extensión de Γ depende de la verdad de ciertas afirmaciones conjuntistas.

Esta dependencia tiene cierto interés filosófico cuando restringimos los dominios apropiadamente. Consideremos por un momento el Axioma de Infinitud de ZFC.

Axioma de Infinitud: $\exists x(\phi \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$[37]

Hay ciertas fórmulas interesantes de $L^1=$ cuya validez depende de la cardinalidad del dominio. Por ejemplo, si asumimos que $L^1=$ cuenta con una letra de predicado diádica R, tenemos la siguiente:

INF*: $\forall x \neg Rxx \wedge \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \wedge \forall x \exists y Rxy$

La fórmula INF* es satisfacible sólo en dominios infinitos (aunque no en todos ellos[38]), y su negación ¬INF* es satisfacible es todos los dominios finitos (aunque no sólo en ellos). Esto quiere decir que si la teoría de conjuntos no postulara la existencia de conjuntos infinitos, la fórmula ¬INF* sería universalmente válida. Puesto de otra forma, si a la hora de interpretar el lenguaje $L^1=$ no usáramos ZFC sino ZFC – {Axioma de Infinitud}, el conjunto de fórmulas universalmente válidas sería "más grande".

La reducción del universo conjuntista a conjuntos finitos afecta a muchísimas otras fórmulas además de ¬INF*. Por ejemplo, la fórmula que expresa que todo orden lineal (i.e. todo orden irreflexivo, transitivo y tricotómico) tiene un máximo puede expresarse en $L^1=$ del siguiente modo:

OLM: $\forall x \neg Rxx \wedge \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz) \wedge \forall x \forall y(Rxy \vee Ryz \vee x = y) \rightarrow \exists y \forall x(Rxy \vee x=y)$

Esta fórmula también se vuelve universalmente válida porque sólo (algunos de) los órdenes lineales *infinitos* carecen de máximo. En cambio, todos los órdenes lineales finitos necesariamente tienen máximo.

Usando consideraciones de este tipo, Mosterín (2004: 62) concluye que

> *(...) la lógica de primer orden también tiene cierta dependencia [de la teoría de conjuntos]. En la polémica acerca del logicismo en las primeras décadas del siglo XX, el estatus del Axioma de Infinitud jugó un rol crucial. La polémica se cerró con el acuerdo de que el axioma de Infinitud pertenece a la teoría de conjuntos y no tiene ninguna relación con la lógica. Pero, como hemos visto, tiene mucho que ver con la lógica, aún con la lógica de primer orden. Dependiendo de si lo aceptamos o no en la metateoría (...) obtenemos lógicas de primer orden sumamente diferentes (extensionalmente diferentes)".*[39]

Hay por lo menos dos maneras de contrarrestar esta objeción. La primera pone énfasis en la existencia de una noción preteórica de consecuencia lógica en primer orden que no tiene correlato en segundo orden. Jané (2004: 795) expresa esta idea de la siguiente forma:

37. Los términos no primitivos ´ϕ`, ´$\cup$`, y ´{y}` pueden definirse fácilmente en términos del vocabulario lógico y de ´$\in$`.

38. Supongamos que R es la relación < y que agregamos a la estructura ω un objeto η tal que para cada $n \in \omega$, $n < \eta$. Esta estructura es infinita, transitiva e irreflexiva, pero no satisface $\forall x \exists y Rxy$ porque ningún objeto es mayor que η.

39. Todas las traducciones que aparecen aquí me pertenecen.

> *(...) tenemos una idea bastante buena de en qué consiste la relación de consecuencia para los lenguajes de primer orden; sabemos al menos que las reglas usuales de inferencia son correctas y esto es suficiente (...) para aceptar la adecuación de la reconstrucción conjuntista. (...) Pero esta (...) no es la situación con la noción de consecuencia canónica de segundo orden, de la cual sólo tenemos una definición conjuntista. (...). Este hecho destaca una importante diferencia entre las nociones de consecuencia de primer y segundo orden.*

Lo que Jané está buscando mostrar es que el concepto de consecuencia *de primer orden* está fijado preconjutísticamente. Es cierto que luego usamos la teoría de conjuntos para definirlo rigurosamente, pero esa definición parte de (y debe adecuarse a) una noción preteórica dada de antemano. Por eso, si resulta que hay cierta inadecuación entre la definición teórica y la noción preteórica, la manera de lidiar con ese desajuste es abandonando la primera y realizando los ajustes apropiados en virtud de las características de la segunda. Cuando pasamos a segundo orden, en cambio, Jané señala que no hay una noción preteórica de consecuencia a la que nuestras teorías puedan o deban adecuarse. Comprendemos esta noción sólo una vez que hemos decidido cuales serán los axiomas de la teoría de conjuntos. En tanto no lo hagamos, no tenemos ninguna idea clara acerca de cómo estará conformado el conjunto de los razonamientos válidos de segundo orden.

A mi modo de ver, la réplica de Jané es inadecuada. No es claro que tengamos, ni siquiera en primer orden, una noción preteórica de consecuencia inmune a los desarrollos teóricos que pretenden caracterizarla y a la cual estos deben adecuarse. Las reflexiones anteriores en torno al Axioma de Infinitud muestran que la noción de consecuencia de primer orden también depende de cuestiones conjuntistas. Creer que nuestras nociones lógicas preteóricas funcionan como una piedra de toque inamovible para juzgar la adecuación de la lógica de primer orden es adoptar una concepción ingenua del modo en que las nociones preteóricas afectan y se dejan afectar por la teoría que usamos para explicarlas. Parece razonable pensar que tanto en primer orden como en segundo orden hay una fuerte interacción entre nociones teóricas y preteóricas.[40] La respuesta de Jané deja sin explicar este vínculo.

40. En esto estoy de acuerdo con Shapiro (1991: 43-49).

La segunda manera de combatir la objeción del defensor de la lógica de segundo orden es mostrar que la dependencia de la noción de consecuencia es muy distinta en cada caso. En el caso de primer orden, la dependencia no implica que la noción de consecuencia esté indeterminada. En el caso de segundo orden, sí. En esta respuesta no hay una apelación a la noción preteórica de consecuencia.

Aunque Mosterín tiene razón en que la noción de consecuencia de primer orden no es ontológicamente inocente, su conclusión puede bloquearse utilizando consideraciones más finas en torno al tipo de dependencia que surge en cada caso. En efecto, parece claro que hay diferencias importantes entre DEPENDENCIA y DEPENDENCIA*. Mientras que el Axioma de Infinitud es parte central de la práctica matemática hace ya mucho tiempo y se ha convertido en uno de los pilares de la disciplina, la Hipótesis del Continuo y la tesis de que existen cardinales inaccesibles (y otras preguntas conjuntistas abiertas reproducibles en L^2 pero no en L^1=) no gozan del mismo privilegio. La indeterminación de la noción de consecuencia de segundo orden surge del hecho de que las hipótesis conjuntistas respecto de las cuales se plantea la dependencia no tienen una respuesta definitiva ni completamente consensuada dentro de la comunidad matemática ni de la comunidad filosófica. El grado de apoyo que estas le confieren a aquellas está lejos de ser homogéneo, y esta falta de homogeneidad es transmitida a la noción de consecuencia lógica. Esto no ocurre en primer orden. El grado de apoyo que el Axioma de Infinitud recibe por parte de la comunidad matemática es casi absoluto. Por lo tanto, si bien es cierto que hay cierto grado de dependencia, no hay ningún sentido fuerte en el que la noción de consecuencia de primer orden esté indeterminada.

La diferencia que se está señalando es de orden pragmático,[41] y el argumento usa la idea de indispensabilidad. Está claro que si el Axioma de Infinitud no formara parte de la teoría conjuntos, eso sería catastrófico para la matemática y sus fundamentos. Para darse cuenta de ello basta con preguntarse qué parte de la "práctica matemática" seguiría en pie si considerásemos sólo conjuntos finitos y operaciones entre ellos. Sean cuales fueren los méritos de la Hipótesis del Continuo y las demás conjeturas conjuntistas indecidibles, su ausencia no puede compararse con la ausencia del axioma de infinitud.[42]

Es posible presentar una objeción a la diferencia que estoy trazando entre el Axioma de Infinitud y los otros principios conjuntistas. Supongamos que en unos años muchos miembros de la comunidad matemática deciden agregar la Hipótesis del Continuo como axioma a ZFC y se logra cierto consenso en torno a su legitimidad.[43] Es más, supongamos que el grado de legitimidad alcanzado por la Hipótesis del Continuo es semejante al que posee el Axioma de Infinitud, de modo tal que la teoría de conjuntos estándar ya no es ZFC sino ZFC junto con la Hipótesis del Continuo como axioma. ¿Seguiremos diciendo que la noción de consecuencia de segundo orden está indeterminada? La objeción pretende señalar que el criterio ofrecido es demasiado variable porque depende de manera excesiva de las decisiones de los miembros de la comunidad matemática. Esto nos da una concepción extraña de la lógica. Una teoría lógica en un tiempo t_1 podría dejar de ser lógica en un tiempo t_2 y volver a ser lógica en un tiempo t_3.

El argumento tiene además cierto sostén histórico. El Axioma de Infinitud, hoy casi incuestionable en la teoría de conjuntos, fue el centro de muchos debates a principios del siglo pasado. Y algo semejante puede decirse del Axioma de Elección, cuestionado en sus comienzos por su naturaleza altamente no constructiva. Actualmente, dada la enorme cantidad de importantes teoremas matemáticos implicados por el Axioma de Elección (o equivalentes a él[44]), se lo considera parte indispensable de la teoría de conjuntos.[45] Pues bien, si esto ocurrió con el Axioma de Infinitud y con el Axioma de Elección, ¿quién puede asegurar que lo mismo no ocurrirá con la Hipótesis del Continuo?

El problema con esta objeción es que infiere demasiado a partir del caso particular de la Hipótesis del Continuo. Recordemos que la Hipótesis del Continuo y el Axioma de Cardinales Inaccesibles son sólo dos ejemplos del conjunto de conjeturas conjuntistas para las cuales tenemos fórmulas análogas en L^2. Con suficiente ingenio y recursos, es posible construir fórmulas de L^2 equivalentes a muchísimos otros principios conjuntistas indecidibles en ZFC.[46] Por ello, el argumento no es eficaz. Aún si agregásemos la Hipótesis del Continuo como axioma a ZFC, la noción de consecuencia de segundo orden seguiría estando notablemente indeterminada. Si, por otra parte, se intenta reforzar el argumento sugiriendo que para cada principio conjuntista indecidible en ZFC la comunidad matemática acepta como parte de la teoría de conjuntos o bien el principio o bien su negación, el ejemplo pierde toda plausibilidad.

Ser anti-fundacionista

La objeción anti-fundacionista puede resumirse del siguiente modo. Una vez que abandonamos el proyecto de fundar las distintas ramas de la matemática en cimientos completamente seguros desde un punto de vista epistémico y abrazamos una concepción de la justificación de carácter más holista, ya no tiene sentido trazar límites nítidos entre la matemática y la lógica, ni pretender que la presencia de un aparato deductivo completo sea una condición necesaria para la aceptación de una teoría lógica. La primera idea

41. No hay diferencias "lógicas" entre, por ejemplo, el Axioma de Infinitud y la Hipótesis del Continuo, porque ambas son fórmulas independientes (en el sentido técnico de independencia) del resto de los axiomas de ZFC.

42. En el mismo campo de la metalógica el Axioma de Infinitud juega un papel importante. Sería imposible probar la completitud de la lógica de primer orden, su compacidad, los teoremas Löwenheim-Skolem, entre otras cosas, sin dicho axioma. El Axioma de Infinitud también es indispensable para tareas más básicas como entender el vocabulario y la sintaxis de los lenguajes formales en términos de secuencias infinitas.

43. El argumento también puede basarse en agregar a ZFC un axioma que implique la Hipótesis del Continuo. Por ejemplo, se sabe que el Axioma de Constructibilidad, famosamente estudiado por Gödel, prueba la Hipótesis Generalizada del Continuo. Ver Drake, F. (1974: 134).

44. El Teorema del Buen Orden y el Lema de Zorn, entre muchos otros.

45. Por ejemplo, G. Moore señala que: "( ) si los críticos constructivistas más severos del axioma prevalecieran, la matemática se vería reducida a una colección de algoritmos". Ver su (1982: 1).

46. En este sentido, Mosterín (2004: 60) concede que "[ ] aún axiomas más fuertes han sido propuestos postulando la existencia de cardinales más y más grandes (como cardinales de Mahlo, cardinales débilmente compactos, cardinales medibles, cardinales de Woodin, o cardinales supercompactos) ( ). Pero ( ) podríamos reformular cada uno de estos axiomas como oraciones puras de la lógica de segundo orden".

(la falta de límites nítidos) es una consecuencia de la tesis de que las teorías lógicas se justifican, al igual que todas las teorías, en base a consideraciones holísticas. La segunda idea (la falta de un aparato deductivo completo) es una consecuencia de nuestra falta de interés en encontrar un conjunto de axiomas en el cual fundar todos nuestros conocimientos, en especial nuestros conocimientos lógico-matemáticos.

En cuanto a lo primero, lo que hay que decir es que un límite difuso sigue siendo un límite. Esto es importante porque es posible ser anti-fundacionista y holista en un sentido más débil del que pone en juego Shapiro.[47] El anti-fundacionismo puede reducirse a la idea de que no es necesario encontrar un conjunto de principios en el cual fundar todo nuestro conocimiento, y el holismo puede reducirse a la hipótesis de que toda creencia es revisable, incluso las creencias lógicas y matemáticas. Ninguna de estas dos tesis implica que no hay diferencia alguna entre la lógica y la matemática ni que sea imposible encontrar límites inteligibles entre ambas disciplinas. No hay nada incompatible entre asumir una posición anti-fundacionista y holista en el sentido anterior, y defender la idea de que la lógica debe ser, en algún sentido razonable del término, más "insustancial" que la matemática.

47. Para una versión más moderada de su propia posición, ver Shapiro, S. (1999).

En cuanto a la completitud, Shapiro está comprometido con la idea de que tener un aparato deductivo completo no es importante. Si nos tomamos la semántica en serio y confiamos en ella en tanto teoría capaz de caracterizar la noción de consecuencia lógica, los aparatos deductivos no tienen mayor interés. Ahora bien, es posible sostener que la presencia de un cálculo completo es útil por motivos que no son estrictamente epistémicos. En particular, tener un cálculo deductivo completo sirve para explicitar qué axiomas y reglas están en juego a la hora de realizar una demostración, y esto es una manera de tener a la vista los compromisos ontológicos que a veces quedan implícitos en el lado semántico.

Esta idea es defendida por Cutler (1997).[48] La pregunta que articula su posición es la siguiente: ¿cómo es posible saber si una fórmula A es una consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Γ o de la unión de Γ con Γ', siendo Γ' un conjunto de principios matemáticos? Cutler asegura que la única manera de descartar que los principios matemáticos de Γ' hayan jugado un papel en la obtención de A es construyendo un sistema axiomático en el cual se expliciten cada uno de los pasos de la prueba $\Gamma \vdash A$. La razón de ello es que en las presentaciones axiomáticas tenemos una lista finita de los axiomas y las reglas autorizadas, de modo que tenemos un control absoluto de las justificaciones ofrecidas en los pasos de la prueba. De este modo, para averiguar si en una demostración han operado supuestos conjuntistas es necesario explicitar la demostración axiomáticamente. Esto, por otra parte, nos permitiría determinar con seguridad si la teoría en la que se realiza la demostración involucra solo principios lógicos o también principios matemáticos.

48. Cutler, D. (1997).

Lo crucial aquí es que este problema no afecta a cualquier teoría. Si estamos usando la teoría de modelos para hacer demostraciones en primer orden y nuestro objetivo es investigar si hubo premisas no lógicas involucradas, basta con volcar las demostraciones al cálculo. Como sabemos que es completo, lo único que necesitamos hacer es explicitar qué axiomas y reglas se utilizaron en la demostración. En segundo orden este problema carece de solución. Como no se tiene un cálculo completo, habrá demostraciones semánticas para las cuales no estamos en condiciones de determinar si ha habido o no intrusión conjuntista.

Nótese que, por lo que dije hasta aquí, mi posición es más moderada que la de Cutler. En Cutler (1997: 90) la idea es que podemos tomar el resultado de completitud como una condición necesaria (aunque no suficiente) para que una teoría sea lógica: "( ) Espero haber mostrado que es posible sostener que la completitud es una condición necesaria para la lógica y al mismo tiempo rechazar el fundacionismo". En mi opinión, de las observaciones anteriores no se sigue que la completitud sea una condición necesaria para que una teoría sea lógica. La ausencia de un aparato deductivo completo no implica automáticamente la presencia de compromisos conjuntistas. La única idea que se desprende de lo anterior es que aun cuando el resultado de completitud no sea indispensable para la aceptación de una teoría lógica, el resultado cumple con una función importante a la hora de determinar la presencia de compromisos conjuntistas no visibles. Esto es suficiente para contrarrestar la idea anti-fundacionista según la cual los cálculos completos no tienen mayor interés.

Cuestiones preliminares 2

Los lenguajes infinitarios admiten fórmulas de longitud infinita. Si $L^1=$ es un lenguaje de primer orden con identidad, diré que $L(\kappa,\lambda)$ (donde κ y λ son cardinales y $\kappa \geq \lambda$[49]) es el lenguaje que resulta de agregar a $L^1=$ un conjunto de variables de cardinalidad κ, y de permitir conjunciones (y disyunciones) de longitud menor a κ y cuantificaciones de longitud menor a λ.

49. La condición de que $\kappa \geq \lambda$ se debe meramente a una cuestión de simplicidad. De nada sirve tener fórmulas con más cuantificadores que variables capaces de ser ligadas.

Es posible presentar una jerarquía infinita de lenguajes infinitarios de acuerdo a la cardinalidad permitida para las fórmulas. El lenguaje $L(\omega,\omega)$ es simplemente $L^1=$. El lenguaje $L(\omega_1,\omega)$ es el lenguaje infinitario más pequeño. Permite fórmulas con un número infinito contable de conjunciones pero sólo un número finito de cuantificadores. Por ejemplo, en $L(\omega_1,\omega)$ tendremos la fórmula $\wedge\{v_i \neq v_{i+1} | i\in\omega\}$ que contiene $\aleph_0$ conyuntos. El lenguaje $L(\omega_2,\omega)$ permite la construcción de fórmulas con $\aleph_1$ conyuntos, pero nuevamente solo permite un número finito de cuantificadores por cada fórmula. El lenguaje $L(\omega_1,\omega_1)$, en cambio, permite fórmulas con un número infinito contable de conjunciones y también con un número infinito contable de cuantificadores. Por ejemplo, la siguiente es una fórmula de $L(\omega_1,\omega_1)$: $\forall v_i\{i\in\omega\} \wedge\{v_i = v_{i+1} | i\in\omega\}$ o, más coloquialmente, $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 ...(v_0 = v_1 \wedge v_1 = v_2 \wedge ...)$. La jerarquía puede continuar indefinidamente. Incluso es posible considerar el lenguaje $L(\infty,\lambda)$ que admite conjunciones de cardinalidad arbitrariamente larga, y el lenguaje $L(\infty,\infty)$ que admite además cuantificaciones de cardinalidad arbitrariamente larga.

La semántica de estos lenguajes es una extensión obvia de la semántica usual de los lenguajes finitarios:

$M, s \models \wedge\{\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ si y sólo si $M, s \models \gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$.

$M, s \models \forall V\varphi$ si y sólo si $M, s' \models \varphi$ para toda asignación s' idéntica a s quizás excepto en lo que asigna a las variables que están en V.[50]

50. Aquí ´$\forall V$` representa una secuencia (posiblemente infinita) de cuantificadores de primer orden. Pueden darse cláusulas similares para la disyunción y la cuantificación existencial.

(De aquí en más, cuando hable de un lenguaje infinitario estaré hablando de un lenguaje junto con una interpretación modelo-teórica).

Como es de esperarse, la capacidad expresiva de los lenguajes infinitarios supera la de $L^1=$. Por ejemplo, ya en $L(\omega_1,\omega)$ podemos caracterizar categóricamente el modelo estándar de la aritmética. Si agregamos una constante para el número cero y un símbolo de función para la operación sucesor, podemos construir una fórmula $\forall x\varphi(x)$ donde j es la siguiente disyunción infinita: $x = 0 \vee x = s0 \vee x = ss0 \vee ...$. Dicha fórmula es verdadera en todas aquellas estructuras isomórficas al modelo estándar de la aritmética y solo en ellas. Esto quiere decir que, al igual que los lenguajes de segundo orden (con semántica canónica), $L(\omega_1,\omega)$ caracteriza los números naturales hasta el isomorfismo.

Sin embargo, no toda estructura puede caracterizarse en $L(\omega_1,\omega)$. Por ejemplo no hay una fórmula que sea verdadera en todas las estructuras bien ordenadas y solo en ellas. La noción de buen orden sí puede caracterizarse en $L(\omega_1,\omega_1)$. La razón es sencilla. Para expresar la idea de buen orden necesitamos expresar que todo subconjunto tiene un mínimo y esa afirmación supone una cuantificación sobre todos los subconjuntos de un determinado conjunto. La única manera de hacer eso con cuantificadores de primer orden es empleando un número infinito de ellos. Nótese que así como las conjunciones infinitas que encontramos en los lenguajes $L(\kappa,\omega)$ para $\omega < \kappa$ "imitan" las cuantificaciones de primer orden (por ejemplo, si estamos en $L(\omega_1,\omega)$ y consideramos el modelo estándar de la aritmética, la fórmula $\forall x\varphi(x)$ puede imitarse con la fórmula $\varphi(1) \wedge \varphi(2) \wedge \varphi(3) \wedge ....$), las cuantificaciones infinitas de primer orden de los lenguajes $L(\kappa,\lambda)$ donde $\omega < \lambda$ "imitan" las cuantificaciones de segundo orden. Si estamos trabajando con un modelo infinito numerable, la fórmula de L^2 (con semántica canónica) $\forall X\varphi(X)$ puede imitarse en $L(\omega_1,\omega_1)$ con la fórmula $\forall v_0\forall v_1\forall v_2...(\varphi(v_0) \wedge \varphi(v_1) \wedge \varphi(v_2) \wedge ...)$.

Este ejemplo (junto con muchos otros) indica que los lenguajes que permiten cuantificaciones infinitas se comportan de manera similar a los lenguajes de segundo orden. Y la similitud no se acaba allí. Si bien es cierto que ningún lenguaje infinitario es completo en el sentido usual, el lenguaje $L(\omega_1,\omega)$ tiene cierta propiedad análoga a la completitud (débil). Si admitimos deducciones de longitud contable y reglas de inferencia infinitarias,[51] puede probarse que para cualquier fórmula ψ de $L(\omega_1,\omega)$, ψ es semánticamente válida si y solo si es un teorema del aparato deductivo infinitario.[52] En cambio los lenguajes que admiten cuantificaciones infinitas comparten prácticamente todas las propiedades de los lenguajes de segundo orden, entre ellas, la incompletitud.

51. Por ejemplo, la regla ($\wedge$intro): Si $\gamma 1, \gamma 2, \gamma 3....$, entonces $\wedge\{\gamma_n \mid n \in\omega\}$; y el siguiente axioma-esquema ($\wedge$-elim): $\wedge\Gamma \rightarrow \gamma$ para cualquier conjunto contable Γ de fórmulas de $L(\omega_1,\omega)$ y cualquier fórmula $\gamma\in\Gamma$.

52. Un refinamiento de este resultado puede encontrarse en Bell, J. (2006, p.6).

Lenguajes infinitarios

¿Son todos los lenguajes infinitarios igualmente aceptables? ¿Habrá, por ejemplo, un lenguaje infinitario $L(\kappa,\lambda)$ donde κ o λ sean cardinales inaccesibles o donde κ o λ estén entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$? La respuesta depende del tipo de teoría de conjuntos que se admita. La verdad del Axioma de Cardinales Inaccesibles es condición necesaria para que exista un lenguaje infinitario con fórmulas de cardinalidad inaccesible y la falsedad de dicho axioma es condición suficiente para que no exista. De la misma forma, es necesario que la Hipótesis del Continuo sea falsa para que sea posible construir un lenguaje $L(\kappa,\lambda)$ donde $\aleph_0 < k < 2^{\aleph_0}$ (o también $\aleph_0 < \lambda \leq \kappa < 2^{\aleph_0}$). Si la Hipótesis del Continuo es verdadera, dicho lenguaje no puede existir. Asimismo, los lenguajes $L(\infty,\lambda)$ y $L(\infty,\infty)$ serán posibles sólo si aceptamos una teoría de conjuntos que admita clases propias, como NBG. En suma, la admisibilidad de un lenguaje infinitario está, en muchos casos, íntimamente ligada con la aceptabilidad de ciertas afirmaciones conjuntistas. En este sentido, nadie puede negar que las lógicas infinitarias dependen esencialmente de la teoría de conjuntos.

¿Por qué es todo esto relevante? Porque es difícil encontrar argumentos para sostener que la noción de consecuencia de segundo orden es una noción lógica y al mismo tiempo encontrar razones parar negar que las nociones de consecuencia de los lenguajes infinitarios sean nociones lógicas. En otros términos, al defender el estatus lógico de la noción de consecuencia de segundo orden se hace difícil justificar que los lenguajes infinitarios no formen parte de lo que llamamos "lógica".

Quizás a un anti-fundacionista extremo este problema le importe poco. Simplemente aceptará que todos los lenguajes infinitarios son lenguajes lógicos que forman parte de un continuo indiferenciado donde también están la lógica de primer orden y la de segundo orden, entre otras. En cualquier caso, el argumento está dirigido a quienes quieren defender que es posible trazar un límite conceptual interesante entre lógica y teoría de conjuntos, y creen que la lógica de segundo orden cae del lado de lo que llamamos "lógica".[53] En este caso el argumento se vuelve relevante porque, como hemos visto, la situación con los lenguajes L(κ,λ) es semejante a la que teníamos con L^2. La admisibilidad de ciertas lógicas infinitarias depende de preguntas abiertas en la teoría de conjuntos estándar. Así como las equivalencias conjuntistas de la sección 3 servían para mostrar que la noción de consecuencia de segundo orden está indeterminada, las observaciones anteriores sugieren que lo que está indeterminado en el caso de los lenguajes infinitarios es la existencia misma de algunos de ellos. De hecho, es fácil ver que para cada cardinal κ, el lenguaje L(κ,λ) será aceptable sólo si la teoría de conjuntos admite la existencia de conjuntos de cardinalidad κ.

53. Un caso claro son los filósofos de la matemática con inclinaciones neologicistas, quienes alegan que la lógica de segundo orden goza de cierta inocencia ontológica y epistemológica. Ver, por ejemplo, los artículos de Hale, B. & Wright, C. (2001).

Incluso estamos en condiciones de decir algo más fuerte. Hay un sentido en que la lógica de segundo orden es expresivamente más poderosa que cualquier lógica infinitaria. Existen estructuras caracterizables hasta el isomorfismo en segundo orden que no pueden ser caracterizadas por ningún lenguaje de la familia L(κ,λ).[54] Por ejemplo, no es posible caracterizar la noción de orden lineal completo en ningún lenguaje infinitario pero sí es posible encontrar una fórmula de segundo orden que la caracterice.[55]

54. Estoy excluyendo aquí los lenguajes L(∞,λ) y L(∞,∞). Desde un punto de vista conceptual, esta exclusión no es problemática debido a que la aceptabilidad de estos lenguajes depende de la adopción de una teoría de conjuntos no estándar que admite clases propias.

55. Para otros ejemplos ver Dickman, M. (1985: 317-363).

Réplicas y contrarréplicas: lógicas infinitarias

En esta sección presentaré dos réplicas al argumento de las lógicas infinitarias e intentaré responderlas. La primera se basa en un resultado técnico según el cual la lógica de segundo orden no es expresivamente más poderosa que las lógicas infinitarias. La segunda se apoya en el hecho de que el estatus no lógico de los lenguajes infinitarios está vinculado a la posibilidad de construir fórmulas y pruebas de longitud infinita.

El poder expresivo

Hacia el final de la sección anterior dije que *hay un sentido* en que los lenguajes de segundo orden tienen más poder expresivo que los lenguajes infinitarios. Esto se funda en la existencia de estructuras caracterizables hasta el isomorfismo en segundo orden que no pueden ser caracterizadas por ningún lenguaje de la familia L(κ,λ). Esta afirmación puede ser engañosa.

Diré que un lenguaje L incluye un lenguaje L´ (donde cada lenguaje está equipado con una semántica modelo-teórica) si para cada oración φ de L hay una oración φ´ de L´ tal que para cada modelo *M*, $M \models \varphi$ en L si y sólo si $M \models \varphi'$ en L´. El ejemplo de la sección anterior es suficiente para mostrar que ninguno de los lenguajes infinitarios L(κ,λ) incluye a la lógica de segundo orden. Pero también puede mostrarse que la lógica de segundo orden no incluye a ninguno de los lenguajes infinitarios, ni siquiera el lenguaje infinitario más pequeño $L(\omega_1,\omega)$. Hay estructuras caracterizables en $L(\omega_1,\omega)$ que no son caracterizables en L^2. Shapiro [1991, p. 242] señala que, por su naturaleza infinitaria, $L(\omega_1,\omega)$ puede caracterizar un número infinito *incontable* de estructuras. En cambio, la lógica de segundo orden puede caracterizar sólo un número infinito *contable* de estructuras. Esto se debe a que el lenguaje $L(\omega_1,\omega)$ cuenta con un número incontable de fórmulas mientras que L^2 sólo cuenta con un número infinito contable de fórmulas.

Ahora bien, una réplica como esta puede ser útil para alguien dispuesto a aceptar que los lenguajes infinitarios son lenguajes lógicos. Pero bajo la suposición de que lo que el defensor de la lógica de segundo orden quiere es mostrar que las lógicas infinitarias carecen de cierta insustancialidad o determinación que la lógica de segundo orden posee, el resultado anterior no sirve para mucho. Si bien es cierto que cualquier lenguaje infinitario caracteriza más estructuras que la lógica de segundo orden, de esto no se sigue que la noción de consecuencia de segundo orden sea insustancial o esté determinada. Si algún $L(\kappa,\lambda)$ incluyese a la lógica de segundo orden, uno podría inferir que los lenguajes infinitarios son más sustanciales o menos determinados que la lógica de segundo orden. Pero ya hemos visto que eso no ocurre.

Fórmulas y pruebas infinitamente largas

La segunda objeción se apoya en la idea de que la lógica estudia la relación de consecuencia del lenguaje cotidiano y del lenguaje de la ciencia. En ninguno de estos lenguajes encontraremos argumentos que involucran enunciados de longitud infinita ni pruebas con un número infinito de pasos. La posibilidad de tener un aparato deductivo (infinitario) completo para un lenguaje como $L(\omega_1,\omega)$ supone que tenemos la posibilidad de construir pruebas infinitarias. Pero así como la posibilidad de construir enunciados de longitud infinita distorsiona la noción tradicional de enunciado como secuencia finita de símbolos, la posibilidad de construir pruebas infinitas distorsiona la noción tradicional de prueba como secuencia finita de fórmulas. Por lo tanto, la noción de consecuencia estudiada por los lenguajes infinitarios no es una noción lógica. Los lenguajes infinitarios deben entenderse como meras estructuras matemáticas que modelan relaciones entre conjuntos (de cardinalidades posiblemente muy grandes).

En cambio, esto no puede decirse de la lógica de segundo orden. No se niega que su poder expresivo sea semejante (y en algunos casos mayor) al de los lenguajes infinitarios, pero lo importante es que esto no se debe a la presencia de fórmulas de longitud infinita ni a la presencia de pruebas con infinitos pasos. Por eso, los lenguajes de segundo orden son herramientas legítimas para estudiar el concepto de consecuencia lógica.

Una vez más, la objeción no prueba lo que pretende probar. Todo lo que establece es que, quizás, hay motivos *adicionales* para creer que los lenguajes infinitarios no representan una noción de consecuencia estrictamente lógica. La mera ausencia de fórmulas y pruebas infinitas en segundo orden no puede tomarse como evidencia de su insustancialidad (ni de que su noción de consecuencia esté determinada). Si así fuera, podríamos decir que, por ejemplo, la teoría de conjuntos estándar es insustancial porque no admite fórmulas ni pruebas de longitud infinita.

Nótese, por otra parte, que la objeción descansa en una concepción epistémica o fundacionista de la lógica. Se les niega estatus lógico a los lenguajes infinitarios en base a razones vinculadas al tipo de inferencias que los hablantes son capaces de realizar. Pero una concepción fundacionista o epistémica de la lógica no es compatible con una defensa de la lógica de segundo orden. El fundacionista está comprometido con la idea de que la completitud es un criterio de logicidad, ya que si lo que se procura es darle seguridad epistémica a las teorías, la manera más adecuada de hacerlo es construyendo un sistema deductivo completo. Por este motivo, la presente objeción no puede usarse para separar los lenguajes infinitarios de la lógica de segundo orden.

Recapitulación y conclusiones

Hay un sentido claro en que la noción de consecuencia de segundo orden está indeterminada (o, equivalentemente, que su determinación depende de la resolución previa de conjeturas conjuntistas indecidibles). El punto principal del artículo consiste en dar respuesta a ciertas objeciones que se han presentado frente a este hecho. La primera objeción se apoya en la idea de que la noción de consecuencia de primer orden también está indeterminada. A esto he replicado que el tipo de indeterminación en juego es completamente diferente en cada caso. La segunda objeción sugiere que una posición filosófica anti-fundacionista y holista conduce automáticamente al desinterés por tener una separación clara entre lógica y matemática. Esto implica que la indeterminación no debería ser un criterio para juzgar la logicidad de una teoría. Mi réplica a este argumento es que es posible ser anti-fundacionista y holista en un sentido más débil del que se pone en juego. En particular, el tipo de anti-fundacionismo y holismo que propongo es compatible con la idea de que es posible y deseable tener una separación interesante entre lógica y matemática y con la idea de que la determinación de la noción de consecuencia juega un papel importante a la hora de establecer esa separación.

El artículo también contiene un segundo argumento en contra del estatus lógico de la relación de consecuencia de segundo orden. Se intenta mostrar que si esta noción de consecuencia es una noción lógica, entonces las nociones de consecuencia asociadas a diversos lenguajes infinitarios de gran capacidad expresiva también son nociones lógicas. La analogía es la siguiente: así como hay ciertas fórmulas de segundo orden que serán válidas si y sólo si ciertas conjeturas conjuntistas son verdaderas, habrá ciertos lenguajes infinitarios que serán aceptables si y sólo si ciertas conjeturas conjuntistas son verdaderas. Aquí también discuto dos contraargumentos. El primero tiene que ver con la posibilidad de usar lenguajes infinitarios para caracterizar ciertas estructuras que no son caracterizables en el lenguaje de segundo orden. Mi objeción es que el argumento no muestra lo que pretende mostrar. Aún cuando los lenguajes infinitarios fueran capaces de codificar más información matemática que los de segundo orden, sería falaz concluir que los lenguajes de segundo orden no codifican información matemática alguna o que su noción de consecuencia es insustancial. El segundo argumento se apoya en el hecho de que ningún hablante podrá jamás emitir un enunciado de longitud infinita (ni hacer o seguir una prueba de longitud infinita). En otras palabras, el carácter no lógico de los lenguajes infinitarios viene dado por su admisión de fórmulas (y pruebas) de longitud infinita. Mi respuesta es que si la no logicidad de los lenguajes infinitarios depende de ese aspecto de su sintaxis, el tipo de criterio que se ha utilizado es de índole epistémica. Pero entonces habrá también razones epistémicas para rechazar la logicidad de la noción de consecuencia de segundo orden, a saber, que no es axiomatizable.

En suma, he buscado refutar una serie de objeciones en contra de la idea de que la noción de consecuencia de segundo orden está indeterminada. Si mis argumentos son correctos, entonces, en principio, tenemos razones para creer que la teoría que caracteriza la noción de consecuencia semántica de segundo orden, esto es, la lógica de segundo orden, no es una teoría estrictamente lógica.

Recibido en febrero de 2012. Aceptado en mayo de 2012.

Cómo citar este artículo:

Rosenblatt, Lucas (2012). Dependencia e indeterminación en la lógica de segundo orden en *Cuadernos de filosofía*, Nº 57. Buenos Aires: Instituto de Filosofía, Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires (pp. 31-49).

Bibliografía

- BELL, J. (2006). "Infinitary Logic", en *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/logic-infinitary/.
- BOOLOS, G. (1985). "To be is to be the value of a variable (or to be some values of some variables)", *Journal of Philosophy* 81, 430-49.
- BUENO, O. (2010). "A defense of second-order logic", *Axiomathes* 21, 365-383.
- CUTLER, D. (1997). "Review of Shapiro (1991)", *Philosophia Mathematica*, 5, 71-91.
- DICKMAN, M. (1985). "Larger Infinitary Languages" en BARWISE, J. & FEFERMAN, S. (1985), *Model-theoretic Logics*, New York, Springer-Verlag, pp. 317-363.
- DRAKE, F. (1974). *Set Theory: an Introduction to Large Cardinals*, North-Holland, Amsterdam.
- EKLUND, M. (1996). "On how logic became first-order", *Nordic Journal of Philosophical Logic* 1, 2, 147-167.
- ENDERTON, H. (1977). *Elements of SetTheory*, Academic Press, London.
- HALE, B. & WRIGHT, C. (2001). *The Reason´s Proper Study*, O.U.P., New York.
- JANÉ, I. (1993). "A critical appraisal of second-order logic", *History and Philosophy of Logic* 14, 67-86.
- JANÉ, I. (2005). "Higher-order logic reconsidered", en SHAPIRO, S. (ed), *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*, Oxford University Press, Oxford.
- LINNEBO, O. (2003). "Plural Quantification Exposed", *Noûs* 37, 1, 71-92.
- LINNEBO, O. (2008). "Plural Quantification", en *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/plural-quant/.
- MOORE, G. (1982). *Zermelo´s axiom of choice: Its origins, development, and influence*, Springer-Verlag, New York
- MOSTERÍN, J. (2004). "How Set Theory Impinges on Logic", en WEINGARTNER, P. (ed.), *Alternative Logics: Do Sciences Need Them?*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, pp. 55-63.
- QUINE, W. (1953). "Two dogmas of empiricism" en *From a logical point of view*, Harvard University Press, Cambridge. (Traducción castellana: *Desde un punto de vista lógico*, Paidós, Barcelona, 2002).
- QUINE, W. (1970). *Philosophy of logic*, Prentice-Hall, New Jersey (traducción castellana: *Filosofía de la lógica*, Alianza, Madrid, 1998).
- RAYO, A. (2005). "Nota crítica sobre *La Paradoja de Orayen*", *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía* 37, 109, 99-115.
- RAYO, A. y YABLO, S. (2001). "Nominalism through de-Nominalization", *Nous* 35, 74-92.
- RESNIK, M. (1988). "Second-order logic still wild", *The Journal of Philosophy* 85, 2, 75-87.
- SHAPIRO, S. (1991). *Foundations without foundationalism. A case for second-order logic*, Clarendon Press, Oxford.
- SHAPIRO, S. (1999). "Do not claim too much: second-order logic and first-order logic", *Philosophia Mathematica* 7, 42-64.
- SHAPIRO, S. (2000). *Thinking about Mathematics*, O.U.P., New York.
- WILLIAMSON, T. (2007). *The Philosophy of Philosophy*, Blackwell, Oxford.